「112. エルミート・ガウシアンビーム（2014 年 9 月号）」で紹介したプログラム

概ね z 方向に進む光ビームの場を

$$\phi(x,y,z)=u(x,y,z)\exp(ikz-i\omega t)$$

［必要なら第 111 章の式(111-5)参照］と表したとき，関数 u は近似的に偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2ik\frac{\partial u}{\partial z}=0 \qquad (112\text{-}1)$$

（近軸の波動方程式）を満たす。ただし，k は波長 λ_0 と屈折率 n を使って

$$k=\frac{2\pi}{\lambda_0}n$$

［必要なら第 111 章の式(111-3)参照］で与えられるパラメーターである。

式(112-1)の解で，x に依存する因子と y に依存する因子を分離できる関数形の解として，エルミート・ガウシアンビーム

$$u(x,y,z)=\frac{C_{m,n}}{w(z)}\exp[-i(m+n+1)\psi(z)]H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right)H_n\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right)$$
$$\times\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w(z)^2}\right)\exp\left(i\frac{k}{2}\frac{x^2+y^2}{R(z)}\right) \qquad (112\text{-}43)$$

が導かれる。ただし，m, n はモードを特徴づける非負の整数とする。係数 $C_{m,n}$ は正規化因子で，

$$C_{m,n}=\sqrt{\frac{2^{1-m-n}}{\pi\, m!n!}} \qquad (112\text{-}49)$$

で与えられる。また関数 $w(z)$ は光ビームの断面強度分布の幅を与える関数で，パラメーターz_{R}（レイリー長）を用いて

$$w(z)^2=\frac{2}{k\,z_{\mathrm{R}}}\left(z_{\mathrm{R}}^2+z^2\right) \qquad (112\text{-}6)$$

で与えられるとする。ただし，z_{R} の値は波長より十分大きいものと仮定する。

また，位相$\psi(z)$はグイ（Gouy）位相とよばれ，

$$\psi = \tan^{-1}\frac{z}{z_\mathrm{R}} \tag{112-42}$$

で定義される。

また，関数 $R(z)$は等位相面の曲率半径に相当し，

$$R(z) = \frac{1}{z}\left(z_\mathrm{R}^2 + z^2\right) = z + \frac{z_\mathrm{R}^2}{z} \tag{112-8}$$

で与えられる。

関数 $H_m(t)$は，エルミートの多項式と呼ばれ，

$$H_m(t) = \sum_{k=0}^{[m/2]} (-1)^k \frac{m!}{k!(m-2k)!}(2t)^{m-2k} \tag{112-37}$$

で与えられる。エルミートの多項式は，エルミートの微分方程式

$$H''(t) - 2\,t\,H'(t) + 2mH(t) = 0 \tag{112-18}$$

の解である。エルミート多項式を使って

$$\psi_m(t) = \left(2^m m!\sqrt{\pi}\right)^{-1/2} H_m(t)\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \tag{112-48}$$

と置くと，関数$\psi_m(t)$は正規化された直交関数系であり，式(112-43)で与えられる振幅の，x 依存性を与える関数となる。

図 112-2 に関数$\psi_m(t)$の例を図示した。また，この作図に用いた fortran77 プログラムを**図 112-3** に示した。計算は，式(112-37), (112-48)に従った。

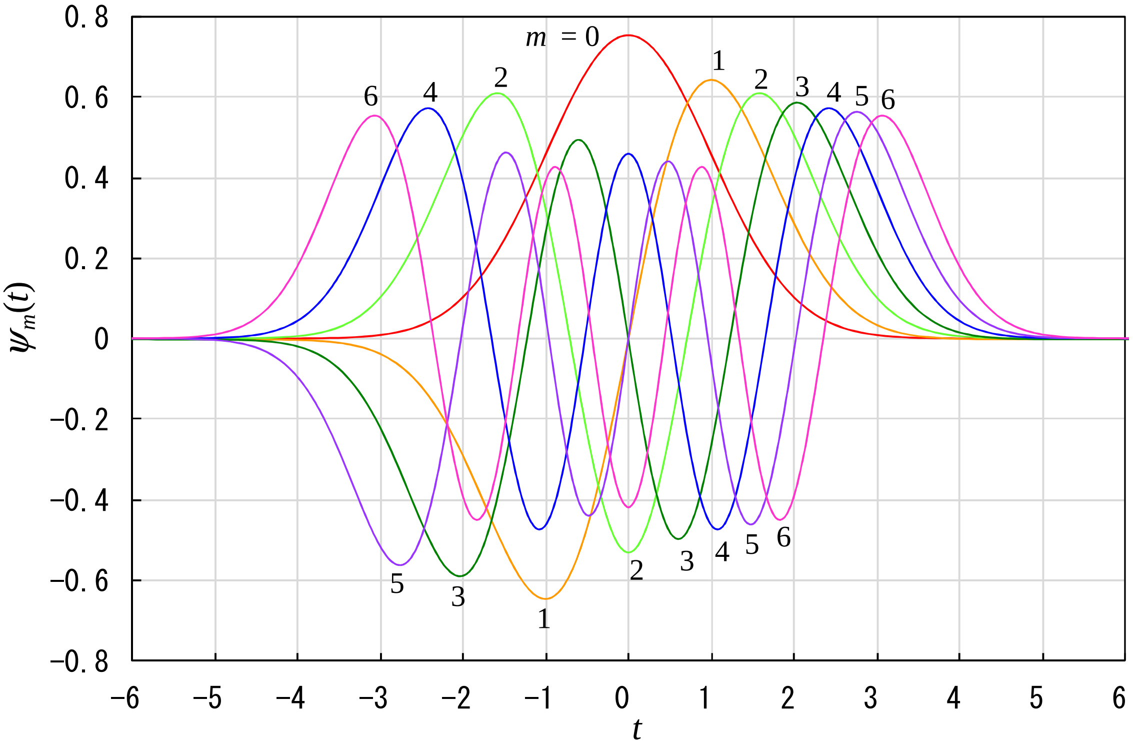

図 112-2　関数 $\psi_m(t)$ のグラフ

関数 $\psi_m(t)$ のグラフ(図 112-2)のデータ作成に用いたプログラム
(FORTRAN77)
ダウンロード